BÀI TOÁN CAUCHY CÓ CHẬM TRONG THANG KHÔNG GIAN BANACH

THE CAUCHY PROBLEM WITH DEVIATING ARGUMENT IN A SCALE OF BANACH SPACES

Phạm Văn Hiển
Khoa Khoa học cơ bản
Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật TP.HCM

1 TÓM TẮT

Bài toán Cauchy trong thang không gian Banach được nghiên cứu ban đầu vào những năm 1960 và đã có những kết quả quan trọng của Nirenberg, Nishida, Treves... Trong các kết quả đó, tác giả sử dụng điều kiện dạng Lipschitz liên tục cho vế phải phương trình. Các kỹ thuật chứng minh là sử dụng định lý điểm bất động Banach, dãy lặp xấp xỉ,...
Trong [1], tác giả giới thiệu khái niệm độ đo phi-compact và từ đó đặt ra khái niệm toán tử cô đặc. Một ví dụ được đặt ra trong [1] là bài toán Cauchy có chậm.
Trong bài báo này, chúng tôi xem xét là bài toán có chậm trong [1] và sử dụng điều kiện mở rộng hơn.
Kỹ thuật chứng minh được sử dụng một kết quả về điểm bất động của ánh xạ cô đặc trong [2].
Từ khóa: Thang không gian Banach; độ đo phi compact; Bài toán Cauchy có chậm.

ABSTRACT:
The Cauchy problem in a scale of Banach spaces has begun in 1960s and stated some importance results. They were stated by Nirenberg, Nishida, ... The Lipschitz continuity condition has use as main assumptions.
In [1], the author present the measure of non-compactness note and give the Cauchy problem with deviating argument as an application.
In this paper, the Cauchy problem with deviating argument is considered in a scale of Banach spaces.
Keywords: scale of Banach spaces; measure of non-compactness; Cauchy problem with deviating argument

2 GIỚI THIỆU

2.1 Bài toán

Cho thang các không gian Banach $X_s, s \in [a, b]$ với tính chất

$$X_{s'} \subset X_s \quad \text{và} \quad ||.||_s \leq ||.||_{s'} \quad \forall a \leq s \leq s' < b$$

Chúng ta quan tâm sự tồn tại nghiệm bài toán toán sau đây đã được khảo sát sự tồn tại nghiệm trong [1]:

$$\begin{cases} u'_t & = f(t, u(h(t))) \\ u(0) & = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Trong đó $t \in [0, T]$ và số $p \in (0, 1)$ sao cho $0 \leq h(t) \leq t^{1/p}, \forall t \in [0, T]$.

2.2 Độ đo phi compact tổng quát

Một ánh xạ Φ xác định trên lớp các tập con bị chặn của không gian Banach E nhận giá trị trong tập được sắp thứ tự một phần $(Q, \leq)$ được gọi là một độ đo phi compact tổng quát nếu

$$\Phi(\overline{co}\Omega) = \Phi(\Omega), \quad \forall \Omega \text{ bị chặn trong } E \tag{2}$$

Trong đó $\overline{co}\Omega$ ký hiệu bao lồi đóng của Ω.
Độ đo phi compact tổng quát Φ trên lớp tập bị chặn trong không gian định chuẩn X, nhận giá trị trong không gian định chuẩn có thứ tự Q được gọi là:

- Chính quy nếu $\Phi(M) = 0 \Leftrightarrow$ M là compact tương đối
- Nửa cộng tính nếu $\Phi(M_1 + M_2) = \Phi(M_1) + \Phi(M_2)$
- Nửa thuần nhất nếu $\Phi(tM) = |t|\Phi(M)$
- Bất biến đối với dịch chuyển nếu $\Phi(x + M) = \Phi(M)$
- Liên tục nếu với Ω và $\varepsilon > 0$ cho trước thì tồn tại số $\delta > 0$ sao cho:
  $||\Phi(\Omega) - \Phi(M)||_Q \leq \varepsilon$ với mọi M thỏa $\sup ||x - y||_X \leq \delta$

Ngoài ra ta cũng xét đến tính chất

$$\Phi(\{u_n\}_{n\geq 1}) = \Phi(\{u_n\}_{n\geq 2}) \tag{3}$$

2.3 Ánh xạ cô đặc

Ánh xạ $f : D \subset X_1 \to X_2$ được gọi là (Φ_1, Φ_2) cô đặc nếu với mọi $\Omega \subset D$ và $\Phi_2(f(\Omega)) \geq \Phi_1(\Omega)$ thì sẽ suy ra Ω là tập compact tương đối.

3 CÁC ĐỊNH LÝ

Sau đây là các định lý được tham khảo.

3.1 Định lý 1, [1]

Cho không gian Banach X với độ đo phi compact tổng quát Φ thoả tính chất (3). Nếu là ánh xạ $f : M \subset X \to M$ là Φ cô đặc thì nó có ít nhất một điểm bất động trong M.
Nhắc lại: Nếu $f(x) = x$ thì x gọi là điểm bất động của f.
Chứng minh:
Đặt $A_0 = M$ và $A_{n+1} = \overline{co} f(A_n)$. Rõ ràng là $A_0 \supset A_1$.
Giả sử $A_{n-1} \supset A_n$ và $x \in A_{n+1}$. Khi đó tồn tại $\sum_{i=1}^n k_i = 1$ và $y_i \in A_n$ sao cho $x = \sum_{i=1}^{n} k_i f(y_i)$. Mà $A_{n-1} \supset A_n$ cho nên $y_i \in A_{n-1}$ hay $f(y_i) \in A_n$. Do đó $x \in A_n$. Tính bất kỳ của x suy ra $A_n \supset A_{n+1}$.
Theo quy nạp dãy A_n là dãy giảm (nghĩa bao hàm), đóng và khác rỗng.
Đặt $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Khi đó C lồi, đóng, và $C = f(C)$ hay $\Phi(C) = \Phi(f(C))$. Do đó tính Φ cô đặc của f suy ra C là compact (C là đóng).
Chọn giá trị $x_0 \in M$ và đặt $x_n = f^n(x_0)$. Dễ thấy $x_n \in A_n$. Tính chất (3) cho thấy $\Phi(\{x_n\}_n) = \Phi(f(\{x_n\}_n))$, kết hợp tính Φ cô đặc của f suy ra $\{x_n\}_n$ là tập compact tương đối. Chúng ta suy ra sự tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ hội tụ. Giới hạn của dãy này là thuộc C nên C khác rỗng.
Sử dụng định lý bất động Schauder, ánh xạ $f : C \to C$ có điểm bất động trong C cũng là điểm bất động đang cần tìm.
Chúng ta chứng minh xong.
Nếu thứ tự trong Q được sinh bởi nón K thì ta còn gọi độ đo là K - độ đo

3.2 Định lý 2, [2]

Cho không gian Banach X với K - độ đo phi compact Φ thoả tính chất chính quy và (3). Không gian Q các giá trị của Φ là một không gian tuyến tính định chuẩn.
Cho $f : M \subset X \to X$ là liên tục. Giả sử có một toán tử $A : K \to K$ là tăng và thỏa mãn:

- (i): $\Phi(f(\Omega)) \leq A(\Phi(\Omega))$ nếu $\Omega \subset M$ và $\Omega, f(\Omega)$ là bị chặn
- (ii): $\lim\limits_{n\to\infty} A^n(x) = 0$ với mọi x thuộc K (sự hội tụ trong Q)

Khi đó có ít nhất một điểm bất động trong M. Chứng minh:
Sử dụng định lý 1, chúng ta chỉ cần chứng minh f là Φ cô đặc.
Xét tập bị chặn $\Omega \subset M$ và giả sử $\Phi(f(\Omega)) \geq \Phi(\Omega)$. Đặt $x = \Phi(\Omega) \in K$.
Ta có: $0 \leq x = \Phi(\Omega) \leq \Phi(f(\Omega)) \leq A(\Phi(\Omega)) = A(x)$.
Do đó, kết hợp tính tăng của A, suy ra $A(x) \leq A^2(x)$ hay một cách tổng quát là $0 \leq x \leq A^n(x)$.
Sử dụng giả thiết định lý, khi n ra vô hạn ta được $x = \lim\limits_{n\to\infty} A^n(x) = 0$ nghĩa là Ω là tập compact tương đối. Vậy f là Φ cô đặc và ta đã chứng minh xong.
Ký hiệu quả cầu $B(u_0, r) = \{x \in X : ||x - u_0|| \leq r\}$, hình trụ $S = \{(t, x) : t \in [0, T]; x \in B(u_0, r)\}$.

3.3 Định lý 3, [1]

Cho f liên tục đều trong hình trụ R.
Giả sử độ đo phi-compact tổng quát Φ trên X, nhận giá trị là số thực có tính chất chính quy, nửa cộng tính, nửa thuần nhất, liên tục, bất biến với dịch chuyển.
Ngoài ra Φ thỏa điều kiện:
Tồn tại hằng số C để với mọi $\Omega \subset B(u_0, r), t \in [0, T]$ thì

$$\Phi[f(t, \Omega)] \leq C[\Phi(\Omega)]^p$$

Khi đó tồn tại $t_1 > 0$ để bài toán (1) có nghiệm $u \in C^1([0, t_1], X)$.

Chứng minh:
Chọn $t_1 \leq min\{1, T\}$ sao cho $||f(t, x)|| \leq \frac{r}{t_1}, \forall (t, x) \in S$. Việc chọn t_1 là tốt nhờ tính liên tục đều của f.
Cũng do tính liên tục của f, có thể khẳng định nghiệm bài toán là điểm bất động ánh xạ $F : C([0, t_1], X) \to C([0, t_1], X)$ xác định bởi:

$$Fu(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(h(s)))ds, \quad t \in [0, t_1]$$

Đặt $M = \{u \in C([0, t_1], X) : u(0) = u_0; ||u(t) - u_0|| \leq \frac{rt}{t_1}, \forall t \in [0, t_1]\}$. Dễ thấy $M \subset C([0, t_1], X)$ là lồi, đóng và bị chặn.
Giả sử $u \in M$. Khi đó với $0 \leq s \leq t_1$ thì $||u(h(s)) - u_0|| \leq \frac{rh(s)}{t_1} \leq \frac{rs}{t_1} \leq r$. Nghĩa là $(s, u(h(s))) \in S$ cho nên $||f(s, u(h(s)))|| \leq \frac{r}{t_1}$. Từ công thức của F chúng ta chứng minh được: $FM \subset M$.
Tiếp theo, chúng ta xây dựng độ đo phi compact tổng quát Φ_C trên lớp tập con bị chặn, đồng liên tục $\Omega \subset M$ và nhận giá trị trong không gian $C([0, t_1], \mathbb{R})$ với thứ tự thông thường ($u \leq v \Leftrightarrow u(t) \leq v(t), \forall t \in [0, t_1]$) như sau:

$$\Phi_C(\Omega)(t) = \Phi(\Omega(t)), \text{ trong đó } \Omega(t) = \{u(t) : u \in \Omega\}$$

Chúng ta sử dụng định lý (1) bằng cách chứng minh $F : M \to M$ là Φ_C cô đặc.
Để chứng minh F là Φ_C cô đặc, giả sử $\Phi_C(\Omega) \leq \Phi_C(F(\Omega))$. Sử dụng các tính chất của Φ nêu trong giả

thiết định lý, chúng ta suy ra (với $t \in [0, t_1]$):

$$\begin{aligned}
m(t) &:= \Phi(\Omega(t)) \leq \Phi(F(\Omega(t))) \\
&= \Phi\{u_0 + \int_0^t f(s, u(h(s)))ds : u \in \Omega\} \\
&\leq \Phi\{\int_0^t f(s, \Omega(h(s)))ds\} \\
&\leq \int_0^t \Phi[f(s, \Omega(h(s)))]ds \\
&\leq \int_0^t C[\Phi(\Omega(h(s)))]^p ds = \int_0^t C[m(h(s))]^p ds
\end{aligned}$$

Bằng cách lặp lại các lập luận trên nhiều lần chúng ta có:

$$\begin{aligned}
m(t) &\leq \int_0^t C[\int_0^{h(s_1)} C[m(h(s_2))]^p ds_2]^p ds_1 \\
&\leq ... \\
&\leq \int_0^t C[\int_0^{h(s_1)} C[\int_0^{h(s_2)} C...[\int_0^{h(s_{n-1})} C[m(h(s_n))]^p ds_n]^p ds_{n-1}...]^p ds_2]^p ds_1 \\
&\leq \int_0^t C[\int_0^{s_1^{1/p}} C[\int_0^{s_2^{1/p}} C...[\int_0^{s_{n-1}^{1/p}} C[m(h(s_n))]^p ds_n]^p ds_{n-1}...]^p ds_2]^p ds_1 \\
&\leq C^{1+p+p^2+...+p^n} \Big[\sup_{0 \leq t \leq t_1} m(t)\Big]^{p^n} \frac{t_1^n}{n^{p^0}(n-1)^{p^1}...2^{p^{n-2}}} := VP
\end{aligned}$$

Do $0 \leq p \leq 1$ nên chuỗi $\sum_{i=0}^n p_i$ hội tụ. Ngoài ra $t_1 \leq 1$ và mẫu số $(n-i)^{p^i} \geq 1$ với mọi $0 \leq i \leq n-2$ cho nên VP hội tụ về 0 khi n ra vô hạn.
Vậy $m(t) := \Phi(\Omega(t)) = 0, \forall t \in [0, t_1]$. Sử dụng tính đồng liên tục của Ω và tính chính qua của Φ, chúng ta suy ra tính compact tương đối của Ω.
Vậy các giả thiết của định lý 1 thỏa mãn, nghĩa là chúng ta chứng minh xong.

4 KẾT QUẢ

Mở rộng hơn [1], chúng ta xét bài toán (1) trong thang không gian Banach X_s. Tức là ánh xạ $f : [0, T]X_{s'} \to X_s, \ \forall a \leq s < s' \leq b$.
Chúng ta ký hiệu $\varphi_s(B)$ là độ đo Kuratowski trên X_s. Kết quả của chúng ta như sau:

4.1 Định lý 4

Giả sử:

- $f : [0, T]X_{s'} \to X_s$ là liên tục với mỗi s<s'
- Tồn tại C và α sao cho với mỗi s < s', $\Omega \subset X_{s'}$ và $t \in [0, T]$ thì:

$$\varphi_s(f(t, \Omega)) \leq \frac{C}{(s' - s)^\alpha} \big(\varphi_{s'}(\Omega)\big)^p \tag{4}$$

- Giả sử một trong hai điều kiện sau thỏa mãn:
(a) T<1
(b) T=1 và $\alpha < 1 - p^2$

Khi đó với mỗi $s_0 \in [a, b)$ thì bài toán (3.1) có nghiệm u(t) $\in X_s, \quad \forall t \in [0, T]$.
Chứng minh:
Do f liên tục nên nghiệm bài toán (3.1) là điểm bất động ánh xạ $F : C([0, T], X_{s'}) \to C([0, t_1], X_s),\ s < s'$ xác định bởi:

$$Fu(t) = u_0 + \int_0^t f(y, u(h(y)))dy, \quad t \in [0, T]$$

Sử dụng định lý 2, chúng ta tìm nghiệm bài toán dạng điểm bất động ánh xạ F.
Đặt $\beta = \frac{\alpha}{(1-p)} > \alpha$
Xét không gian

$$Y = \{g : \Delta := [0, T][a, b) \to R, ||g|| = \sup_{(t,s)\in\Delta} (b - s)^\beta |g(t, s)| < \infty\}$$

Và K là nón các hàm không âm trong Y.
Ta đặt E=$C(I, X_b)$ và xét B là một tập bị chặn trong E.
Đặt $B(t) = \{v(t)|v \in B\} \subset X_b \subset X_s, \quad \forall s < b.$
Chúng ta xây dựng K độ đo phi compact trên lớp tập con bị chặn của E, nhận giá trị trong K như sau :

$$\phi(B)(t, s) = \varphi_s(B(t)) \ \ \forall (t, s) \in \Delta$$

Định nghĩa là tốt vì $(b - s)^\beta \phi(B)(t, s) \le (b - a)^\beta \varphi_b(B(t))$
Tiếp theo, chúng ta xây dựng toán tử $A : K \to K$ là:

$$A(g)(t, s) = \inf_{s<s'<b} \frac{C}{(s' - s)^\alpha} \int_0^t \big(g(h(y), s')\big)^p dy$$

Khi đó $A(g) \in K$ là do với lựa chọn $s' = (b + s)/2$ thì:

$$\begin{aligned}(b - s)^\beta |A(g)(t, s)| \quad &\le (b - s)^\beta \inf_{s<s'<b} \frac{C}{(s' - s)^\alpha} \int_0^t \Big(\frac{||g||}{(b - s')^\beta}\Big)^p dy \\ &\le (b - s)^{\beta(1-p)-\alpha} 2^{\alpha+\beta p} C||g||^p t \\ &\le C||g||^p T 2^\beta\end{aligned}$$

Chúng ta sẽ dùng quy nạp chứng minh với mọi n>1 và $s \le s_n < ... < s_1 < b$ thì

$$|A^n(g)(t, s)| \le \frac{C^{1+p+...+p^{n-1}} ||g||^{p^n} t^n}{(s_n - s)^\alpha (s_{n-1} - s_n)^{\alpha p} ... (s_1 - s_2)^{\alpha p^{n-1}} (b - s_1)^{\beta p^n} n(n - 1)^p ... 2^{p^{n-2}}} \tag{5}$$

Từ định nghĩa toán tử A, dễ thấy với $(s < s_1 < b)$ thì :

$$|A(g)(t, s)| \le \frac{C||g||^p t}{(s_1 - s)^\alpha (b - s_1)^{\beta p}}$$

Suy ra với $s < s_2 < s_1 < b$, thì :

$$\begin{aligned}|A^2(g)(t, s)| \quad &\le \frac{C}{(s_2 - s)^\alpha} \int_0^t |A(g)(h(y), s_2)|^p dy \\ &\le \frac{C}{(s_2 - s)^\alpha} \Big[\frac{C||g||^p}{(s_1 - s_2)^\alpha (b - s_1)^{\beta p}}\Big]^p \int_0^t (h(y))^{np} dy \\ &\le \frac{C^{1+p}||g||^{p^2} t^2}{(s_2 - s)^\alpha (s_1 - s_2)^{\alpha p} (b - s_1)^{\beta p^2} 2}\end{aligned}$$

Nghĩa là (5) đúng với n=2, giả sử (5) đúng
Suy ra với $s < s_{n+1} < ... < s_1 < b$, thì:

$$\begin{aligned}|A^{(n+1)}(g)(t, s)| \quad &\le \frac{C}{(s_{n+1} - s)^\alpha} \int_0^t |A^n(g)(h(y), s_{n+1})|^p dy \\ &\le \frac{C^{1+...p^{n-1}} ||g||^{p^n} t^{n+1}}{(s_{n+1} - s)^\alpha (s_n - s_{n+1})^{\alpha p} ... (s_1 - s_2)^{\alpha p^n} (b - s_1)^{\beta p^{n+1}} (n + 1) ... 2^{p^{n-1}}}\end{aligned}$$

Tức là (5) đúng với mọi n.
Chúng ta tiếp tục đánh giá vế phải (5) bằng cách chọn s_i sao cho:
$(s-s_n) = (s_i - s_{i-1}) = (b-s_1) = \frac{b-s}{n+1}, \quad \forall i = 2, ..., n$ thì được:

$$\begin{aligned}
(5) &\leq \frac{C^{1+...+p^{n-1}}||g||^{p^n}}{(b-s)^{\alpha(1+...p^{n-1})+\beta p^n}} \frac{(n+1)^{\alpha/(1-p)+(\beta-\alpha)p^n}}{n...2^{p^{n-2}}} T^n \\
&\leq \frac{C^{1+...+p^{n-1}}||g||^{p^n}}{(b-s)^{\alpha(1+...p^{n-1})+\beta p^n}} \frac{(n+1)^{\beta+(\beta-\alpha)p^n}}{n...2^{p^{n-2}}} T^n \\
&\leq \frac{C^{1+...+p^{n-1}}||g||^{p^n}}{(b-s)^{\alpha(1+...p^{n-1})+\beta p^n}} \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{p^2} (n+1)^{\beta-1-p-p^2+(\beta-\alpha)p^n} T^n \qquad (6)
\end{aligned}$$

- **Giả sử T=1 và $\alpha < 1 - p^2$**
  Suy ra $\beta < 1 + p$. Khi đó với M đủ lớn thì :

  $$(6) \leq M(n+1)^{(\beta-\alpha)p^n - p^2}$$

  Khi n đủ lớn để $(\beta-\alpha)p^n - p^2 < 0$ thì vế phải (6) hội tụ về 0 khi n ra vô hạn

- **Nếu T<1**
  Ta thấy rằng $(6) \leq M(n+1)^q T^n$, trong đó $q = \beta - 1 - p - p^2 + (\beta-\alpha)p$ là giá trị cố định. Do đó ta cũng dễ dàng chứng minh được vế phải (6) hội tụ về 0 khi n ra vô hạn

  $$\lim_{n\to\infty} T^n (n+1)^q = 0$$

Chúng ta đã chứng minh được điều kiện (ii) trong định lý 2:
$\lim\limits_{n\to\infty} A^n(g) = 0$ với mọi g thuộc K.
Cuối cùng ta chứng minh (i) trong định lý đó, tức là $\phi(F(B)) \leq A(\phi(B))$
Thật vật, giả sử $B \subset E$ là bị chặn, ta có:

$$\begin{aligned}
\phi(F(B))(t,s) \quad &= \varphi_s(F(B)(t)) = \varphi_s\{\textstyle\int_0^t f(y, u(h(y)))dy | u \in B\} \\
&\leq \int_0^t \varphi_s[f(u, B(h(y)))]dy \\
&\leq \frac{C}{(s'-s)^\alpha} \int_0^t (\varphi_{s'}(B(h(y))))^p dy \\
&\leq \frac{C}{(s'-s)^\alpha} \int_0^t (\phi(B)(h(y), s'))^p dy
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi $s' > s$ nên ta có $\phi(F(B)) \leq A(\phi(B))$.

Áp dụng định lý 2 ta suy ra sự tồn tại điểm bất động của F cũng là nghiệm bài toán (1): $u(t) \in X_b, \forall t \in [0, T]$.
Với một giá trị $s_0 \in [a, b)$ cho trước, chúng thay b trong chứng minh trên bằng s_0.
Định lý đã chứng minh xong

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, B. N. Sadovskii, Measure of Noncompactness and Condensing operators, Bivkauser Veriang, Berlin, 1992

2. Nguyễn Bích Huy, Võ Viết Trí, Fixed point theorem via cone-norm and cone-value measure of noncompactness, preprint

3. M. V. Safonov, The abstract Cauchy-Kovalevskaya theorem in a weighted Banach space, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol XLVIII, 629-637 (1995)